

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО  
ОБРАЗОВАНИЯ РФ  
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ,  
НАУКИ, КУЛЬТУРЫ И СПОРТА РА  
ГОУ ВПО РОССИЙСКО-АРМЯНСКИЙ (СЛАВЯНСКИЙ)  
УНИВЕРСИТЕТ**

**Институт Математики и Информатики  
Кафедра математики и математического моделирования**

**ВОПРОСЫ КАНДИДАТСКОГО МИНИМУМА ПО  
СПЕЦИАЛЬНОСТИ**

***05.13.18 «МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ,  
ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ»***

Утверждено кафедрой математики и мат. моделирования  
Протокол №6 от 17.02.2023 г.

зав. кафедрой математики  
и мат. моделирования



Дарбинян А.А.

Ереван-2023

## Введение

В основу настоящей программы положены следующие дисциплины: функциональный анализ; уравнения математической физики; численные методы.

### 1. Функциональный анализ

1. Метрические, нормированные, гильбертовы пространства. Метрические пространства. Непрерывные отображения. Компактные множества.

2. Принцип сжатых отображений, методы последовательных приближений и их приложения.

3. Линейные, нормированные, банаховы и гильбертовы пространства. Сильная и слабая сходимость. Задача о наилучшем приближении. Наилучшее равномерное приближение. Минимальное свойство коэффициентов Фурье.

4. Линейные функционалы и операторы. Непрерывные линейные операторы. Норма и спектральный радиус оператора.

5. Сходимость операторов; ряд Неймана и условия его сходимости. Теоремы о существовании обратного оператора. Мера обусловленности линейного оператора и ее применение при замене точного уравнения (решения) приближенным.

6. Линейные функционалы. Сопряженное пространство. Теорема Банаха – Штейнгауза и ее приложения.

7. Теорема Рисса о представлении линейного ограниченного функционала (для гильбертова пространства). Спектр оператора.

8. Сопряженные, симметричные, самосопряженные, положительно определенные, вполне непрерывные операторы и их спектральные свойства.

9. Вариационные методы минимизации квадратичных функционалов, решения уравнений и нахождения собственных значений (методы Ритца, Бубнова – Галеркина, наименьших квадратов).

10. Дифференцирование нелинейных операторов, производные Фреше и Гато. Метод Ньютона, его сходимость и применение.

11. Пространства функций  $C$ ,  $L_2$ ,  $L_p$ ,  $W_p^l$ . Обобщенная производная. Неравенства Пуанкаре – Стеклова – Фридрихса. Понятие о теоремах вложения.

### 2. Задачи математической физики

1. Математические модели физических задач. Математические модели физических задач, приводящие к уравнениям математической физики. Основные уравнения математической физики; постановки задач. Корректно и некорректно поставленные задачи.

2. Обобщенное решение краевых задач для эллиптических уравнений. Дивергентная форма записи эллиптического оператора.

3. Понятие об обобщенном решении. Основные свойства гармонических функций (формулы Грина, теоремы о среднем, принцип максимума).

4. Фундаментальное решение и функция Грина для уравнения Лапласа.

5. Задача Коши. Задача Коши для уравнения теплопроводности и уравнения колебаний (в одномерном и многомерном случаях).

6. Фундаментальные решения. Характеристики. Понятие об обобщенных решениях.

7. Обобщенные решения смешанных задач для уравнений параболического и гиперболического типов; существование, единственность и непрерывная зависимость от данных задачи.

8. Теорема Стеклова о разложении в ряд Фурье по собственным функциям задачи Штурма – Лиувилля.

### 3. Численные методы

1. Численные методы алгебры. Прямые и итерационные методы решения систем линейных уравнений с полными матрицами и матрицами специального вида. Одношаговые итерационные методы.

2. Чебышевские одношаговые итерационные методы. Оптимальный набор чебышевских параметров и вычислительная устойчивость. Трехчленные (двухшаговые) чебышевские итерационные методы. Методы спуска и метод сопряженных градиентов.

3. Приближение функций. Общие свойства систем ортогональных многочленов. Многочлены Лежандра и Чебышева; их свойства и приложения. Интерполяционные многочлены. Выбор узлов интерполяции.

4. Быстрое дискретное преобразование Фурье. Интерполяция нелокальными и локальными сплайнами.

5. Численное интегрирование. Интерполяционные квадратурные формулы. Задача оптимизации квадратуры. Квадратурные формулы типа Гаусса. Многомерные квадратурные формулы. Понятие о методе Монте-Карло. Интегрирование сильно осциллирующих функций.

6. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Численные методы решения задачи Коши и краевых задач. Оценка погрешности, сходимость и устойчивость.

7. Методы прогонки и стрельбы. Разностные схемы для решения дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами. Понятие о жестких системах обыкновенных дифференциальных уравнений и методах их решения.

8. Разностные и вариационно-разностные методы решения уравнений математической физики. Основные понятия (аппроксимация, устойчивость, сходимость). Методы построения разностных схем (метод сеток, интегроинтерполяционный метод, метод аппроксимации интегральных тождеств, вариационно-разностные и проекционно-разностные методы, метод Галеркина, метод конечных элементов, метод аппроксимации квадратичного функционала); их применение к решению краевых и начально-краевых задач для эллиптических, параболических и гиперболических уравнений. Оценка порядка аппроксимации и сходимости. Двухслойные и трехслойные схемы; их устойчивость.

9. Экономичные методы решения нестационарных многомерных задач; методы решения нелинейных уравнений (теплопроводности и газовой динамики). Дивергентные и монотонные разностные схемы. Схемная и искусственная вязкость.

10. Методы решения сеточных уравнений. Прямые методы (прогонки, быстрого дискретного преобразования Фурье, циклической редукции). Метод последовательной верхней релаксации, неявные схемы с эквивалентными по спектру операторами, попеременно-треугольный метод. Методы расщепления и переменных направлений. Понятие о методе Федоренко. Оценки скорости сходимости.

11. Методы решения обратных и некорректных задач. Применение методов регуляризации, минимизации сглаживающего функционала и итерационных методов для решения вырожденных, несовместных и плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений и интегральных уравнений первого рода.

## Основная литература

- 1.Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. 6-е изд. М.: Изд-во МГУ, 1999.
- 2.Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.
- 3.Владимиров В.С. Жаринов В.В. Уравнения математической физики. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008.
- 4.Треногин В.А. Функциональный анализ. ФИЗМАТЛИТ, 2007.
- 5.Лебедев В.И. Функциональный анализ и вычислительная математика. 4-е изд. М.: Физматлит, 2000.
- 6.Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры. М.: Наука, 1977.
- 7.Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику. М.: Наука,
- 8.Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1982.
- 9.Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Физматлит, 2001.
- 10.Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1977.
- 11.Годунов С.К., Рябенский В.С. Разностные схемы. 2-е изд. М.: Наука, 1977.
- 12.Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
- 13.Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976.
- 14.Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Изд-во “Лань” 2009.
- 15.Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.1, 2, 3. ФИЗМАТЛИТ, 2007.
- 16.Акопян Ю.Р. Основы численных методов. Часть I, Изд-во РАУ, Ереван -2005.
- 17.Акопян Ю.Р. Основы численных методов. Часть II, Изд-во РАУ, Ереван -2007.
- 18.М.А.Евграфов. Аналитические функции. М.: Изд-во “Лань” 2008.

## Дополнительная литература

- 1.Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач. М.: Изд-во МГУ, 1994.
- 2.Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа. М.: Изд-во “Лань” 2009.
- 3.Мысовских И.П. Интерполяционные кубатурные формулы. М.: Наука, 1981.
4. Иосида К. Функциональный анализ М.Мир 1967.
5. Данфорд Н. Шварц Т. Линейные операторы Ин.лит.М. 1963.
- 6.Ф.Р. Гантмахер. Теория матриц.- М., Наука, 1967
- 7.Вагаршакян А.А. Математический анализ. Изд-во РАУ, Ереван -2011.