МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ, НАУКИ, КУЛЬТУРЫ И СПОРТА РА
ГОУ ВПО РОССИЙСКО-АРМЯНСКИЙ (СЛАВЯНСКИЙ) УНИВЕРСИТЕТ

Институт Математики и Информатики
Кафедра математики и математического моделирования

ВОПРОСЫ КАНДИДАТСКОГО МИНИМУМА ПО СПЕЦИАЛЬНОСТИ

1.2.2. «МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ»

Утверждено кафедрой математики и мат. моделирования
Протокол №9 от 09.02.2024 г.

И. о. зав. кафедрой математики
и мат. моделирования **Тонооян Г. Г.**

Ереван-2024

Введение

В основу настоящей программы положены следующие дисциплины: функциональный анализ; уравнения математической физики; численные методы.

1. Функциональный анализ

1. Метрические, нормированные, гильбертовы пространства. Метрические пространства. Непрерывные отображения. Компактные множества.
2. Принцип сжатых отображений, методы последовательных приближений и их приложения.
3. Линейные, нормированные, банаховы и гильбертовы пространства. Сильная и слабая сходимость. Задача о наилучшем приближении. Наилучшее равномерное приближение. Минимальное свойство коэффициентов Фурье.
4. Линейные функционалы и операторы. Непрерывные линейные операторы. Норма и спектральный радиус оператора.
5. Сходимость операторов; ряд Неймана и условия его сходимости. Теоремы о существовании обратного оператора. Мера обусловленности линейного оператора и ее применение при замене точного уравнения (решения) приближенным.
6. Линейные функционалы. Сопряженное пространство. Теорема Банаха – Штейнгауза и ее приложения.
7. Теорема Рисса о представлении линейного ограниченного функционала (для гильбертова пространства). Спектр оператора.
8. Сопряженные, симметричные, самосопряженные, положительно определенные, вполне непрерывные операторы и их спектральные свойства.
9. Вариационные методы минимизации квадратичных функционалов, решения уравнений и нахождения собственных значений (методы Ритца, Бубнова – Галеркина, наименьших квадратов).
10. Дифференцирование нелинейных операторов, производные Фреше и Гато. Метод Ньютона, его сходимость и применение.
11. Пространства функций C, L_2, L_p, W_p^l. Обобщенная производная. Неравенства Пуанкаре – Стеклова – Фридрихса. Понятие о теоремах вложения.

2. Задачи математической физики

1. Математические модели физических задач. Математические модели физических задач, приводящие к уравнениям математической физики. Основные уравнения математической физики; постановки задач. Корректно и некорректно поставленные задачи.
2. Обобщенное решение краевых задач для эллиптических уравнений. Дивергентная форма записи эллиптического оператора.
3. Понятие об обобщенном решении. Основные свойства гармонических функций (формулы Грина, теоремы о среднем, принцип максимума).
4. Фундаментальное решение и функция Грина для уравнения Лапласа.
5. Задача Коши. Задача Коши для уравнения теплопроводности и уравнения колебаний (в одномерном и многомерном случаях).
6. Фундаментальные решения. Характеристики. Понятие об обобщенных решениях.
7. Обобщенные решения смешанных задач для уравнений параболического и гиперболического типов; существование, единственность и непрерывная зависимость от данных задачи.

8. Теорема Стеклова о разложении в ряд Фурье по собственным функциям задачи Штурма – Лиувилля.

3. Численные методы

1. Численные методы алгебры. Прямые и итерационные методы решения систем линейных уравнений с полными матрицами и матрицами специального вида. Одношаговые итерационные методы.
2. Чебышевские одношаговые итерационные методы. Оптимальный набор чебышевских параметров и вычислительная устойчивость. Трехчленные (двушаговые) чебышевские итерационные методы. Методы спуска и метод сопряженных градиентов.
3. Приближение функций. Общие свойства систем ортогональных многочленов. Многочлены Лежандра и Чебышева; их свойства и приложения. Интерполяционные многочлены. Выбор узлов интерполяции.
4. Быстрое дискретное преобразование Фурье. Интерполяция нелокальными и локальными сплайнами.
5. Численное интегрирование. Интерполяционные квадратурные формулы. Задача оптимизации квадратуры. Квадратурные формулы типа Гаусса. Многомерные квадратурные формулы. Понятие о методе Монте-Карло. Интегрирование сильно осциллирующих функций.
6. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Численные методы решения задачи Коши и краевых задач. Оценка погрешности, сходимость и устойчивость.
7. Методы прогонки и стрельбы. Разностные схемы для решения дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами. Понятие о жестких системах обыкновенных дифференциальных уравнений и методах их решения.
8. Разностные и вариационно-разностные методы решения уравнений математической физики. Основные понятия (аппроксимация, устойчивость, сходимость). Методы построения разностных схем (метод сеток, интегроинтерполяционный метод, метод аппроксимации интегральных тождеств, вариационно-разностные и проекционно-разностные методы, метод Галеркина, метод конечных элементов, метод аппроксимации квадратичного функционала); их применение к решению краевых и начально-краевых задач для эллиптических, параболических и гиперболических уравнений. Оценка порядка аппроксимации и сходимости. Двухслойные и трехслойные схемы; их устойчивость.
9. Экономичные методы решения нестационарных многомерных задач; методы решения нелинейных уравнений (теплопроводности и газовой динамики). Дивергентные и монотонные разностные схемы. Схемная и искусственная вязкость.
10. Методы решения сеточных уравнений. Прямые методы (прогонки, быстрого дискретного преобразования Фурье, циклической редукции). Метод последовательной верхней релаксации, неявные схемы с эквивалентными по спектру операторами, попеременно-треугольный метод. Методы расщепления и переменных направлений. Понятие о методе Федоренко. Оценки скорости сходимости.
11. Методы решения обратных и некорректных задач. Применение методов регуляризации, минимизации сглаживающего функционала и итерационных методов для решения вырожденных, несовместных и плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений и интегральных уравнений первого рода.

Основная литература

1.Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. 6-е изд. М.: Изд-во МГУ, 1999.
2.Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.
3.Владимиров В.С. Жаринов В.В. Уравнения математической физики. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008.
4.Треногин В.А. Функциональный анализ. ФИЗМАТЛИТ, 2007.
5.Лебедев В.И. Функциональный анализ и вычислительная математика. 4-е изд. М.: Физматлит, 2000.
6.Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры. М.: Наука, 1977.
7.Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику. М.: Наука,
8.Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1982.
9.Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Физматлит, 2001.
10.Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1977.
11.Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы. 2-е изд. М.: Наука, 1977.
12.Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
13.Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976.
14.Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Изд-во “Лань” 2009.
15.Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.1, 2, 3. ФИЗМАТЛИТ, 2007.
16.Акопян Ю.Р. Основы численных методов. Часть I, Изд-во РАУ, Ереван -2005.
17.Акопян Ю.Р. Основы численных методов. Часть II, Изд-во РАУ, Ереван -2007.
18.М.А.Евграфов. Аналитические функции. М.: Изд-во “Лань” 2008.

Дополнительная литература

1.Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач. М.: Изд-во МГУ, 1994.

2.Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа. М.: Изд-во “Лань” 2009.

3.Мысовских И.П. Интерполяционные кубатурные формулы. М.: Наука, 1981.
4. Иосида К. Функциональный анализ М.Мир 1967.
5. Данфорд Н. Шварц Т. Линейные операторы Ин.лит.М. 1963.
6.Ф.Р. Гантмахер. Теория матриц.- М., Наука, 1967
7.Вагаршакян А.А. Математический анализ. Изд-во РАУ, Ереван -2011.